Université Saint-Joseph Faculté de sciences économiques	Année universitaire 2005-2006 Semestre 2	Test de Math IV Date : 12/05/06 – 2h00

Documents interdits

Exercice I (7 points)

Parmi les ensembles suivants, quels sont les sous-espaces vectoriels de R^n ?
Si l'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel, déterminez-en une base et la dimension.

- $A = \{u = (x, y) \in R^2 / x = 3y\}$
- $B = \{u = (x, y) \in R^2 / x = 1 + 2y\}$
- $C = \{u = (x, y, z) \in R^3 / z + 2y - x = 0\}$
- $D = \{u = (x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 1\}$

Exercice II (4 points)

Notons F(*R*,*R*) l'espace vectoriel des fonctions numériques définies de *R* dans *R*.

Soit E l'ensemble des fonctions *f* de F telles que : $f'' - 3f' + 2f = 0$

Soit E_0 l'ensemble des éléments de F qui vérifient en outre la relation
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec *a*, *b* et *c* des valeurs réelles.

1. Montrez que E et E_0 sont des sous-espaces vectoriels de F.

2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur *R* par les relations : $f_1(x) = e^x$ $f_2(x) = e^{2x}$
   Montrez que f_1 et f_2 sont des éléments de E linéairement indépendants.

Exercice III (4 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de E. Posons
$f_1 = u_1 + u_2$ $f_2 = u_2 + u_3$ $f_3 = u_3 + u_4$ $f_4 = u_4 - u_1$

a) Montrez que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E.

b) Soit *v* un vecteur de E. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 ses composantes dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), et y_1, y_2, y_3, y_4 ses composantes dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) .
Calculez x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4, puis exprimez y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4.

Exercice IV **(5 points)**

Une entreprise fabrique trois biens B_1, B_2, B_3 à partir de trois matières b_1, b_2, b_3. Le système de production est supposé linéaire.

Soit $A_3=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice décrivant ce système.

a_{ij} représente la quantité du bien b_i (i=1,2,3) nécessaire à la fabrication d'une unité du bien B_j (j=1,2,3).

De plus, le travail nécessaire à la fabrication d'une unité de chacun des biens B_1, B_2, B_3 est respectivement : 3, 2 et 1 unités.

On note x_1, x_2, x_3 les quantités produites des biens B_1, B_2 et B_3.

a) Donnez une représentation matricielle du problème.

b) On suppose que l'entreprise dispose d'un stock de 50 unités de b_1, 80 unités de b_2 et 90 unités de b_3.
Elle dispose de plus de T=180 unités de travail.
Existe-il un programme de production qui épuise tout le stock ?